Compléments aux exercices

Le théorème de Césaro (*I 1)*) est un cas particulier de théorème de sommation de relations de comparaison, cf. Analyse 3, 3.3.9. Il est proposé ici avec des variantes. Son importance est traduite par les applications diverses qui suivent.

C 3.1 Moyenne de Césaro

I – Moyenne de Césaro

*1)** Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{C}$, et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la **suite des moyennes de Césaro**, c'est-à-dire la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n).$$

Montrer que, si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un complexe l, alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers l.

2) La réciproque de la propriété du *1)* est-elle vraie?

II– Quelques variantes ou généralisations

1) Lemme de l'escalier : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\infty]{} a \in \mathbb{C}$;

montrer $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} a$.

2) Cas de $+\infty$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$;

montrer $\dfrac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

*3)** *Généralisation de I 1)*

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{C}$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose :

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xrightarrow[n\infty]{} +\infty.$$

Démontrer : $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \xrightarrow[n\infty]{} l.$

III– Quelques applications

1) *a)* Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que, si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel l, alors $(\sqrt[n]{u_n})_{n \geqslant 1}$ converge aussi vers l. (Utiliser un logarithme).

b) En déduire les limites, quand n tend vers $+\infty$, de :

$\sqrt[n]{n}$, $\quad (\mathrm{C}_{pn}^{n})^{\frac{1}{n}}$ pour $p \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ fixé,

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

2) Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}.$$

a) Montrer $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Montrer $U_{n+1} - U_n \xrightarrow[n\infty]{} 2$.

c) En déduire, en utilisant le lemme de l'escalier :

$u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ (c'est-à-dire $\sqrt{2n}\, u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$).